Welke rekenvaardigheden vraagt de 21^e eeuw?

Computerisering en globalisering hebben grote consequenties voor werkgelegenheid en employability. Tal van banen verdwijnen, of zijn al verdwenen, en om de overblijvende banen moet mondiaal geconcurreerd worden. Dit maakt de vraag, met welke vaardigheden de leerlingen later de meeste kansen hebben, uiterst urgent. Terecht wordt er in dit verband gewezen op het belang van $21^{st.}$ century skills. Maar dat is niet voldoende, ook de leerstofinhouden zullen moeten worden toegesneden op de eisen die de arbeidsmarkt stelt. Dit geldt met name voor rekenen en wiskunde. Immers, alle reken-wiskundige bewerkingen die in het primair, secondair en tertiair onderwijs worden aangeboden kunnen door computers worden uitgevoerd – wat in de wereld buiten de school ook in toenemende mate gebeurt.

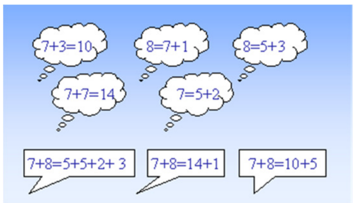
In eerdere artikelen in Didactief wees ik in dit verband op de noodzaak van meer aandacht voor meten, statistiek, variabelen, functies en globaal rekenen. Dit laatste onderdeel wil ik hier centraal stellen. Daarbij is het goed ons te realiseren, dat computer de werkgelegenheid op twee manieren beïnvloedt. Enerzijds zijn er de taken die door de computer worden overgenomen, anderzijds functioneert de computer als uitbreiding menselijke mogelijkheden. Dan moeten we ons niet zozeer richten op vaardigheden die met de computer concurreren, maar vooral op vaardigheden die nodig zijn om goed te kunnen functioneren in een omgeving waar computers het uitvoerende werk doen. We komen dan op zaken als het *herkennen* van problemen die rekenend kunnen worden opgelost, het *vertalen* van dergelijke problemen in rekenopdrachten die door een computer kunnen worden uitgevoerd, het *begrijpen* van die bewerkingen en het *interpreteren* en *evalueren* van antwoorden.

Het is duidelijk dat toepassingssituaties hier een belangrijke rol spelen, maar ik wil me hier richten op het laatste aspect. De computergebruiker zou een berekening die de computer maakt globaal moeten kunnen controleren en ook los van de computer zou hij of zij moeten kunnen inschatten wat je in bepaalde situaties aan antwoorden kunt verwachten. De basis voor deze vorm van globaal rekenen ligt volgens mij in het beschikken over netwerken van getalrelaties en het flexibel omgaan met eigenschappen van rekenoperaties.

Netwerken van getalrelaties

Bij het evalueren van berekeningen is het in het algemeen voldoende om globaal te bepalen wat het antwoord ongeveer zou moeten zijn. Om een eenvoudig voorbeeld te geven: Bij een opgave als 4x27 kan dit betekenen dat een leerling bedenkt dat het antwoord ruim 4x25=100 is, een ander dat het minder is dan 4x30=120. En weer een andere leerling kan bedenken dat er twee keer 54=108 uitkomt. Idealiter zou het zo moeten zijn dat elke leerling *die* getalrelaties gebruikt, waar hij of zij vertrouwd mee is. Wanneer we willen dat de leerlingen wat dit betreft goed beslagen ten ijs komen, dan moeten we investeren in het inoefenen van, en spelen met, getalrelaties die je veel kunt gebruiken. Voor vermenigvuldigen kunnen we bijvoorbeeld denken aan veelvouden van 25, 75, 125 en dergelijke en het kunnen relateren van deze getallen aan kommagetallen, breuken en procenten. Het gaat uiteindelijk om

netwerken van getalrelaties op basis waarvan leerlingen bijvoorbeeld kunnen bedenken dat 4x1,25=5, omdat 4x25=100 en dus 4x125=500, of, omdat 4x1,25 gelijk is aan 4x1¼.
Voor alle duidelijkheid wil ik benadrukken dat ik niet pleit voor allerlei regeltjes voor handig rekenen die de leerlingen zouden moeten leren toepassen. Wanneer de leerlingen beschikken over een netwerk van getalrelaties, kunnen ze deze getalrelaties als het ware opvatten als puzzelstukjes die ze zo kunnen combineren dat ze een antwoord vinden. Ter illustratie kunnen we bijvoorbeeld het uitrekenen van 7+8 nemen. Wanneer deze opgave wordt voorgelegd aan jonge kinderen die over een passend netwerk van getalrelaties beschikken, dan zullen de getallen 7 en 8 verschillende getalrelaties bij hen oproepen. Zoals bijvoorbeeld: 7+3=10, 7+7=14, 8=7+1, 7=5+2, en 8=5+3.



Die kunnen op verschillende manieren gecombineerd worden tot een rekenzin die het gewenste antwoord oplevert. Zoals bijvoorbeeld 7+8=5+5+2+3=10+5, of 7+8=7+7+1=14+1, of 7+8=7+3+5=10+5. Reken-technisch gebruiken de leerlingen hier de associatieve en de commutatieve eigenschap. In het hierboven genoemde voorbeeld van 5x25, gebruiken ze de distributieve eigenschap: 5x25=4x25+1x25. Het gaat hier dus om het gebruiken van rekeneigenschappen en getalrelaties en niet om het kiezen uit een repertoire van “handige oplossingsstrategieën.

Dat vraagt een ander basisschool programma dan rekenonderwijs dat opleidt tot het snel en routinematig uitvoeren van standaardprocedures. De kracht van standaardprocedures is dat je geen rekening houdt met specifieke kenmerken van getallen. De procedure werkt altijd en je hoeft niet over de getallen na te denken. De keerzijde is dat je de hierboven beschreven getal- en rekenkennis ook niet ontwikkelt. Een ander voordeel van standaardprocedures is dat ze ook efficiënt zijn in de kennis die ze gebruiken. Je hebt aan de basisautomatismen voor optellen en aftrekken en de tafels van vermenigvuldiging voldoende voor het uitvoeren van alle cijferalgoritmen. Maar ook hier is er weer een keerzijde. Producten die de gangbare tafels overstijgen – zoals bijvoorbeeld veelvouden van 12, 15 en 25 – komen niet aan de orde.

Netwerken als basis voor onbenoemde getallen

Netwerken van getalrelaties hebben nog een andere functie, ze spelen een belangrijke rol bij de overgang van benoemde naar onbenoemde getallen. Bij het rekenen met natuurlijke getallen gaat dit min-of-meer vanzelf. Getallen die eerst alleen nog betekenis hebben in combinatie met concrete hoeveelheden, zoals in: “4 knikkers”, krijgen geleidelijk aan het karakter van objecten, die hun betekenis ontlenen aan een netwerken van getalrelaties. Het getal 4 wordt dan geassocieerd met 4=3+1, 4=2+2, 4=5-1, 4=8:2, enz. Bij breuken ligt hier een probleem. Onderzoek van Bruin-Muurling laat zien, dat in het PO vrijwel uitsluitend met breuken als benoemde getallen wordt gewerkt, terwijl in het VO wordt verondersteld dat de instromende leerlingen het niveau van de onbenoemde getallen al hebben bereikt. Om een goede aansluiting te bewerkstelligen moeten de breuken ook hun betekenis gaan ontlenen aan getalrelaties. Bij ¾ kan dat bijvoorbeeld zijn: ¾=¼+¼+¼=3x¼ , ¾=1–¼ , ¾=½+¼ of ¾+¾=1½, maar ook 3:4=¾, ¾=6/8=9/12=12/16=… en ¾ van 100 is 75 enz.

Basis voor vervolgonderwijs

Bij rekenvaardigheden voor de 21e eeuw gaat het niet alleen om toepassingen buiten de school. Het gaat ook om de basiskennis die de leerlingen in het vervolgonderwijs nodig hebben. Bij de roep om beheersing van de basisvaardigheden rekenen, wordt echter te gemakkelijk verondersteld dat de gangbare basisschoolstof aan dit criterium voldoet. Maar, waar hebben leerlingen het vlot en routinematig met elkaar vermenigvuldigen van getallen van drie of vier cijfers nodig om toegang te krijgen tot nieuwe leerstof? Het lijkt erop dat de vraag wat de leerlingen echt nodig hebben niet wordt gesteld en dat er alleen maar wordt aangenomen dat de zogeheten basisvaardigheden noodzakelijke basisvaardigheden zijn, omdat ze zo genoemd worden.

Wanneer we kijken naar een basis voor de algebra, dan komen we al snel op andere zaken. Zoals inzicht in de eigenschappen van de operaties optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en delen. Deze eigenschappen vormen een onlosmakelijk deel van het rekenen èn vormen een inhoudelijke basis voor de algebra. Als basis voor de algebra moeten deze eigenschappen ook flexibel gehanteerd kunnen worden. Zo zijn het vermenigvuldigen van tweetermen, ((a+b)x(c+d)=ac+ad+bc+bd), en de daarmee samenhangende merkwaardige producten, gebaseerd op het herhaald toepassen van de distributieve eigenschap. Dit flexibel gebruiken van eigenschappen van rekenoperaties is overigens niet nieuw. Het heeft in Nederland een lange traditie in het zogeheten "hoofdrekenen" dat in de vijftiger jaren nog onderdeel was van het toelatingsexamen voor Gymnasium en HBS.

Samenvattend, wanneer we het rekenonderwijs zo willen inrichten dat het de leerlingen zo goed mogelijk voorbereidt op de arbeidsmarkt van de toekomst, dan zal er een centrale plaats moeten worden ingeruimd voor het ontwikkelen van netwerken van getalrelaties en het flexibel gebruiken van rekeneigenschappen. Daarmee verbeteren we ook de aansluiting tussen PO en VO.